Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Communication

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle (12 questions) **Page 3**

2. Probabilités de défaut, durée de vie et intervalle de confiance (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-com.fr/assets/annales/bts-communication/E2 - Mathématiques/2022/BTS Communication - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude d'une fonction exponentielle

Un chariot de fête foraine roule initialement à 20 m·s⁻¹, puis ralentit sous l'action d'un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction exponentielle, étudiée au moyen d'une équation différentielle, de ses variations, d'une primitive et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

Pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = Ce^{-at}$. Ici, $a = 0{,}8$, donc toutes les solutions sur $[0; +\infty[$ sont de cette forme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0{,}8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Soit g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. Ainsi, pour tout $t \geq 0$, $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$. Elle vérifie donc l'équation différentielle demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0{,}8g(t) = 4$, donc g est une solution.

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. Une solution particulière de l'équation complète est $g(t) = 5$.
2. On lui ajoute les solutions de l'équation homogène, soit $Ce^{-0{,}8t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + Ce^{-0{,}8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

Les solutions sont $y(t) = 5 + Ce^{-0{,}8t}$. La condition $f(0) = 20$ donne $5 + C = 20$, donc $C = 15$. En remplaçant la constante, on obtient la solution cherchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t), lorsque t tend vers +∞, est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Comme $-0,8 < 0$, $e^{-0,8t}$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Le terme exponentiel disparaît donc dans la limite et il reste le terme constant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et égale à 5. La courbe C admet donc une asymptote horizontale d'équation :

$$y = 5.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. À partir de l'expression donnée pour f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Comme $e^{-0,8t} > 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur $[0; +\infty[$. La fonction est donc strictement décroissante. Elle part de $f(0) = 20$ et tend vers 5.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	–	
Variations de f	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour s'arrêter, la vitesse devrait atteindre 0. Or $e^{-0,8t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, et donc :

- $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$ à tout instant fini ;
- la vitesse tend vers 5 m·s⁻¹ sans atteindre cette valeur.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas ; sa vitesse tend vers 5 m·s⁻¹.

Question 4.a. **Vérifier que la fonction F définie par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

En dérivant $F(t) = -18{,}75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est égale à $f(t)$: F est bien une primitive de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. **À l'aide de l'intégrale donnée, calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue est $d = F(1) - F(0)$. En évaluant la primitive aux deux bornes, on trouve $d = (-18{,}75e^{-0,8} + 5) - (-18{,}75) = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8}$ m. Son arrondi au centimètre est $15{,}33$ m.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8}$ m, soit $15{,}33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Question à choix multiples : recopier l'unique expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée.**

Le développement limité à l'ordre 2 est celui dont le reste est de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. Parmi les propositions, c'est la troisième, où $4{,}8 = \frac{24}{5}$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. **Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.**

L'équation de la tangente en $t = 0$ est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et, avec $f'(t) = -12e^{-0,8t}$, $f'(0) = -12$. En reportant ces valeurs dans l'équation de la tangente :

$T : y = 20 - 12t.$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 12t.$

2. Probabilités de défaut, durée de vie et intervalle de confiance

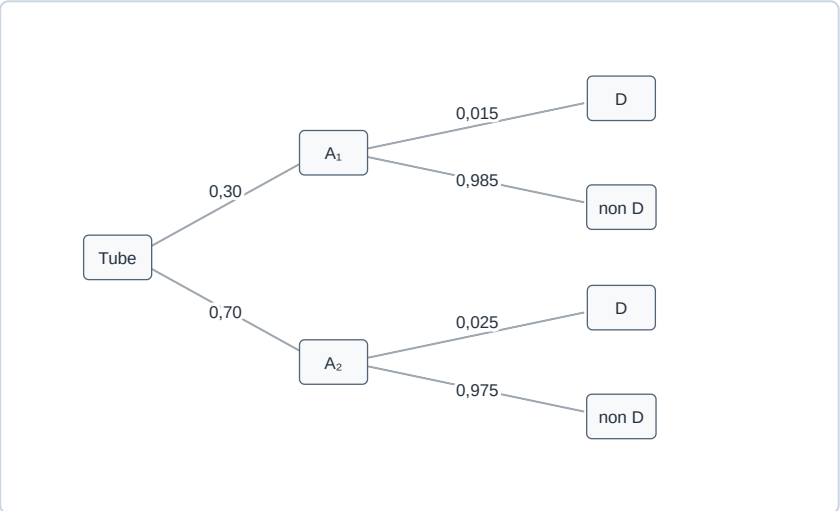
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des parts de production et des taux de défaut distincts. L'exercice étudie les probabilités conditionnelles, la durée de fonctionnement modélisée par une loi exponentielle, puis l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la production des tubes par les deux ateliers et la présence éventuelle d'un défaut.

À la première étape, le tube provient de l'atelier 1 avec la probabilité 0,30, ou de l'atelier 2 avec la probabilité 0,70. Depuis chaque atelier, on branche vers le défaut et son contraire : les taux conditionnels de défaut sont respectivement 0,015 et 0,025. Les probabilités complémentaires sont donc 0,985 et 0,975. Le diagramme indique les six probabilités à inscrire sur les branches.

Production des tubes et présence d'un défaut



Probabilités de production et probabilités conditionnelles de défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre : ateliers 1 et 2 avec probabilités 0,30 et 0,70 ; taux de défaut respectifs 0,015 et 0,025.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Pour obtenir la probabilité que les deux événements se réalisent, on multiplie la probabilité de choisir l'atelier 1 par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier. Ainsi, avec les valeurs indiquées dans l'énoncé, $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$. Cela correspond à 0,45 % de la production totale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 % de la production totale.

Question 3. **Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à 0,022.**

Un tube défectueux provient nécessairement de l'un des deux ateliers. Les deux chemins menant à l'événement D sont incompatibles : on additionne donc leurs probabilités. Pour l'atelier 1, le produit vaut $0,30 \times 0,015 = 0,0045$; pour l'atelier 2, il vaut $0,70 \times 0,025 = 0,0175$. Au total, $P(D) = 0,0045 + 0,0175 = 0,022$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit une probabilité de défaut de 2,2 %.

Question 4. **Sachant que le tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

1. La probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut est $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0,70 \times 0,975 = 0,6825$.
2. La probabilité qu'un tube soit sans défaut est $P(\overline{D}) = 1 - 0,022 = 0,978$. On divise la probabilité du chemin par celle de l'événement connu : $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825 / 0,978 \approx 0,698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité cherchée est environ 0,698, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **Déterminer l'espérance E(T) de la durée de bon fonctionnement d'un tube fluorescent, puis interpréter le résultat dans le contexte.**

La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,001$. D'après la formule rappelée dans l'énoncé, son espérance est l'inverse du paramètre : $E(T) = 1/\lambda = 1/0,001 = 1\,000$ heures. Cette espérance décrit la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube dans le stock ; elle ne signifie pas que chaque tube fonctionne exactement pendant cette durée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube fluorescent.

Question 2. **Calculer, avec un arrondi à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

La fonction de répartition donnée pour la loi exponentielle est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Comme cette loi est continue, les probabilités associées à $T < 8\,000$ et à $T \leq 8\,000$ sont identiques. On remplace t par 8 000 et λ par 0,001 : $1 - e^{-0,001 \times 8\,000} = 1 - e^{-8} \approx 0,99966$. Arrondie au centième, la valeur est 1,00.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1,00$, arrondie au centième.

Question 3. **Calculer, avec un arrondi à 10^{-2}, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.**

1. Pour une loi exponentielle, la probabilité de dépasser une durée t est le complément de la fonction de répartition : $P(T > t) = 1 - P(T \leq t) = e^{-\lambda t}$.
2. Pour 10 000 heures, $P(T > 10\,000) = e^{-0,001 \times 10\,000} = e^{-10} \approx 0,0000454$. L'arrondi au centième demandé dans l'énoncé est donc 0,00 ; la valeur non arrondie reste strictement positive.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arrondie au centième, $P(T > 10\,000) = 0,00$ (valeur non arrondie : environ 0,0000454).

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **À partir des 975 rivets conformes observés parmi les 1 000 rivets de l'échantillon, donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes dans la production.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence des rivets conformes observée dans l'échantillon. Il y a 975 rivets conformes sur un total de 1 000 rivets, donc $f = 975/1\,000 = 0,975$. Cette fréquence estime la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production, sans prétendre donner sa valeur exacte.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f = 0,975$, soit une estimation ponctuelle de 97,5 % de rivets conformes.

Question 2. **Déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % pour la proportion p, centré sur la fréquence observée f, à l'aide de la formule fournie. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.**

On utilise la formule de l'énoncé avec la fréquence observée $f = 0,975$ et la taille d'échantillon $n = 1\,000$. La marge vaut $1,96\sqrt{0,975(1-0,975)/1\,000}$. Les bornes avant arrondi sont respectivement environ 0,965323 et 0,984677 ; arrondies au millième, elles donnent :

Borne	Calcul	Valeur arrondie
Inférieure	$f - 1,96\sqrt{f(1-f)/n}$	0,965
Supérieure	$f + 1,96\sqrt{f(1-f)/n}$	0,985

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de deux heures et de coefficient 2, sauf pour Traitement des matériaux où il est de 3. Les deux exercices de 10 points portent sur le freinage d'un chariot modélisé par une fonction exponentielle, puis sur les défauts de tubes et la conformité de rivets. Les compétences évaluées incluent équations différentielles, analyse, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers une limite finie L lorsque t tend vers +∞, la courbe admet l'asymptote horizontale y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et P(T > t) = e^(-λt).
- L'intervalle de confiance à 95 % donné pour une proportion est f ± 1,96√(f(1-f)/n).

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir établi la solution générale de l'équation différentielle.
- Justifier les variations par le signe de f' et relier la limite à l'équation de l'asymptote.
- Dans l'arbre pondéré, distinguer les parts de production des probabilités conditionnelles de défaut.
- Vérifier les unités, les calculs de probabilité et la précision d'arrondi demandée.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser la condition initiale dans une équation différentielle ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière de l'équation complète. Remplacez ensuite t par 0 et f(0) par 20 pour déterminer la constante de la solution.

Q : Comment calculer une probabilité de durée supérieure à un seuil avec une loi exponentielle ?

Utilisez P(T > t) = e^(-λt), qui est le complément de la probabilité cumulée P(T ≤ t). Ici, λ est exprimé par heure : le seuil t doit donc aussi être exprimé en heures.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et leurs parties peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices, avancez si une question bloque et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et les arrondis.

Q : Quels éléments faut-il soigner pour répondre aux attentes de notation ?

Présentez les calculs utiles, indiquez les formules appliquées et concluez dans le contexte. Respectez les notations des événements, les unités et les précisions d'arrondi indiquées; la calculatrice est autorisée selon les modalités de la page de garde.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-com.fr/assets/annales/bts-communication/E2 - Mathématiques/2022/BTS Communication - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Communication : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.