Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS Communication

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d’un chariot : équation différentielle, étude de fonction et développement limité (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d’un signal d’entrée et d’un signal de sortie (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts-com.fr/assets/annales/bts-communication/E2 - Mathématiques/2022/BTS Communication - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot : équation différentielle, étude de fonction et développement limité

Un chariot de fête foraine, initialement lancé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage. Sa vitesse f(t) est étudiée à l'aide d'une équation différentielle, de ses variations et de sa limite, puis utilisée pour calculer une distance et étudier le développement limité de f.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

On reconnaît l'équation homogène $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. D'après la formule fournie, ses solutions sont de la forme $y(t) = Ce^{-at}$. En remplaçant a par $0,8$, on obtient toutes les solutions sur $[0; +\infty[$. La constante réelle C est arbitraire, car aucune condition initiale n'est imposée dans cette question.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,8t}$, avec $C \in \mathbb{R}$, donne toutes les solutions sur $[0; +\infty[$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche de l'équation, on trouve $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité étant vraie pour tout t, la fonction g vérifie bien l'équation différentielle $y' + 0,8y = 4$. Elle en est une solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien solution, car $g'(t) + 0,8g(t) = 4$ pour tout t.

Question 1.c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

On sait que $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. Les solutions de cette équation s'obtiennent en ajoutant à cette solution particulière une solution de l'équation homogène associée $y' + 0,8y = 0$. Cette dernière s'écrit $Ce^{-0,8t}$. Comme C peut être n'importe quel réel, on obtient ainsi l'ensemble de toutes les solutions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $y(t) = Ce^{-0,8t} + 5$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2. **Déterminer la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.**

D'après la question précédente, la solution cherchée s'écrit $f(t) = Ce^{-0,8t} + 5$. À l'instant initial, $f(0) = Ce^0 + 5 = C + 5$. La condition $f(0) = 20$ donne donc $C = 20 - 5 = 15$. En remplaçant C dans la solution générale, on obtient l'expression de la vitesse du chariot pendant le freinage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution vérifiant $f(0) = 20$ est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. **Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.**

La fonction est définie par $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers zéro, tandis que le terme constant reste égal à 5. La limite de la somme est donc égale à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La vitesse tend vers 5 : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. **En déduire que la courbe représentative C admet une asymptote, puis en donner une équation.**

La question précédente établit que $f(t)$ tend vers la valeur finie 5 quand t tend vers $+\infty$. Une courbe représentative dont l'ordonnée tend vers une limite finie admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$, où L est cette limite. Ici, cette valeur est 5 : la courbe C admet donc une asymptote horizontale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'asymptote horizontale de C en $+\infty$ a pour équation $y = 5$.

Question 2. **À partir de l'expression donnée de f'(t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.**

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	5

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante. Elle vaut 20 en zéro et tend vers 5 en $+\infty$; cette limite n'est pas atteinte.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement décroissante de 20 vers sa limite 5 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. **Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.**

Le chariot s'arrête si sa vitesse devient nulle. Or, pour tout $t \geq 0$, l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ est strictement supérieure à 5, car l'exponentielle est positive. La vitesse diminue et tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, mais elle ne tend pas vers zéro. Le système de freinage décrit par le modèle ne permet donc pas l'arrêt du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et tend vers 5, pas vers zéro.

Question 4.a. **Vérifier que la fonction F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la règle de dérivation d'une exponentielle composée, $(e^{-0,8t})' = -0,8e^{-0,8t}$. Ainsi, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est exactement celle de $f(t)$. Par conséquent, F est bien une primitive de f sur l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. **Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre t = 0 et t = 1 à l'aide de l'intégrale de f, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance parcourue est $d = \int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0)$. Avec la primitive donnée, $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$. On obtient donc $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres, valeur exacte. Numériquement, cela donne environ $15,3251$ mètres, soit $15,33$ mètres au centimètre près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. **Parmi les propositions, choisir l'expression correcte du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel affiche la partie polynomiale $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste doit être négligeable devant t^2 lorsque $t \to 0$, ce qui s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$. Parmi les propositions visibles, seule la troisième reprend ce polynôme et un reste de cette forme. C'est donc la réponse à choisir.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La troisième proposition : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse zéro est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. On lit dans l'énoncé $f(0) = 20$, et la dérivée donnée fournit $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et son coefficient directeur est -12. En reportant ces deux valeurs dans l'équation, on obtient son expression.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

La tangente à C au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d’un signal d’entrée et d’un signal de sortie

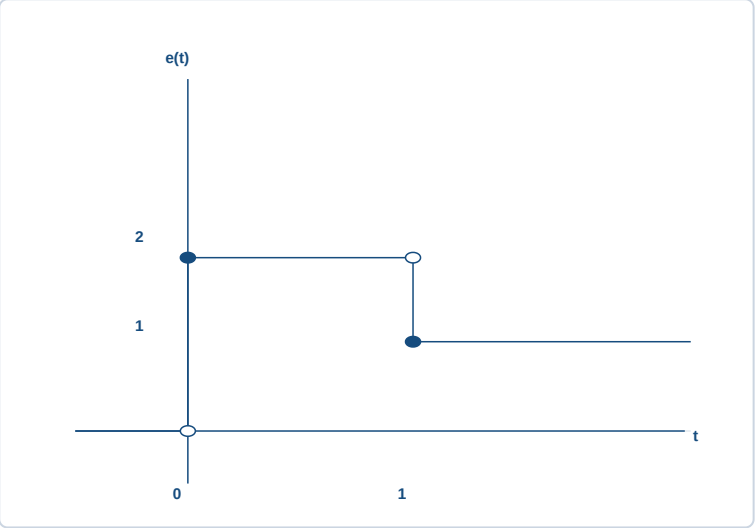
Un système électrique de fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1) reçoit le signal causal e(t) = 2U(t) - U(t - 1). L’exercice porte sur les transformées de Laplace, la décomposition en éléments simples, l’expression du signal de sortie et le tracé des signaux.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Le signal est causal : il est nul avant 0. À partir de 0, il vaut 2 jusqu’à 1 exclu. En 1, la fonction échelon retardée vaut 1, donc le signal prend la valeur 1 pour tout t supérieur ou égal à 1.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée e(t) = 2U(t) - U(t - 1).

Par linéarité et d’après le formulaire, $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. Ainsi, $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - e^(-p)/[p(p + 1)].

On utilise $S(p) = H(p)E(p)$, avec $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = (2 - e^{-p})/p$. Donc $S(p) = \dfrac{2 - e^{-p}}{p(p+1)}$, ce qui donne, en séparant les deux termes, l'expression demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Question 2. Vérifier l'identité 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

Mettons les deux fractions au même dénominateur : $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} = \dfrac{p+1-p}{p(p+1)}$. Le numérateur vaut 1, ce qui établit l'identité.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(-p)/p et de e^(-p)/(p + 1), en utilisant le formulaire.

Les transformées usuelles donnent les deux premières inverses. Pour les deux dernières, on applique la propriété de retard d'une unité : $f(t-1)U(t-1)$ a pour transformée $F(p)e^{-p}$.

- $1/p$: $U(t)$.
- $1/(p+1)$: $e^{-t}U(t)$.
- e^{-p}/p : $U(t-1)$.
- $e^{-p}/(p+1)$: $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression du signal de sortie s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

Avec $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$, la partie non retardée de $S(p)$ a pour inverse $2(1 - e^{-t})U(t)$. Le terme retardé ne contribue pas pour $0 \leq t < 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0;1[$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. À partir de l'expression admise de s(t) sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte, puis avec une valeur approchée au dixième.

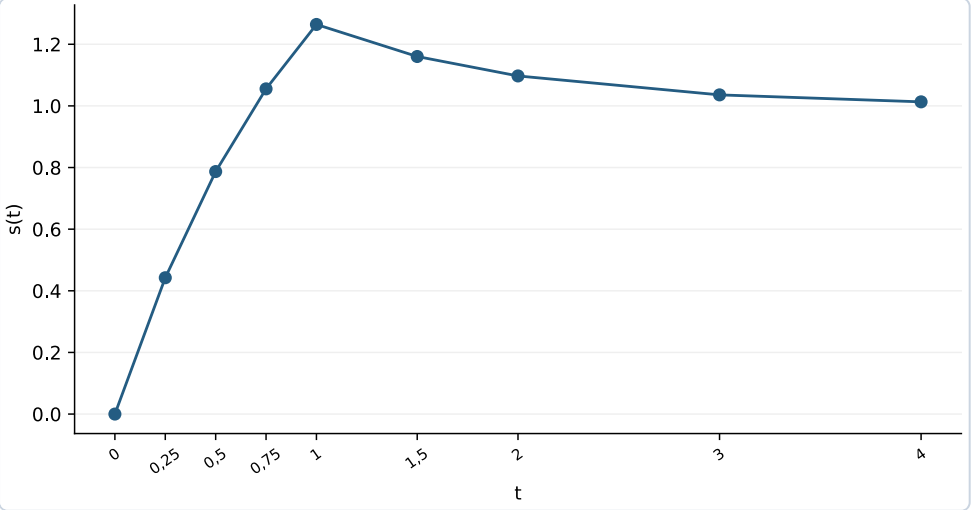
On applique l'expression donnée pour $t \geq 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - 2/e$. Avec $e \approx 2,718$, l'arrondi au dixième est 1,3.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, tracer $s(t) = 2(1 - e^{-t})$, puis, pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Les deux expressions coïncident en 1. La première branche est croissante ; la seconde décroît vers l'asymptote horizontale $s = 1$.



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe passe par $(0;0)$ et $(1;2-2/e)$, puis décroît vers $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, $s(t) = 1 + (e-2)e^{-t}$. Comme e^{-t} tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, la limite est 1.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, avec équation différentielle, intégrale, développement limité et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b avec a non nul, la solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers une limite finie L quand t tend vers +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t0 et t1 est l'intégrale de la vitesse : d = ∫[t0,t1] f(t) dt.
- La transformée de Laplace de f(t-a)U(t-a) est F(p)e^(-ap), selon la propriété de décalage temporel.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour appliquer la condition initiale, remplacer t par 0 dans la solution générale et déterminer la constante.
- Dans le tableau de variations, justifier le signe de la dérivée sur tout l'intervalle étudié.
- Pour calculer une distance, évaluer F(t1) - F(t0), puis arrondir au centimètre comme demandé.
- Pour les signaux à échelon, distinguer les intervalles avant et après t = 1 et contrôler les valeurs aux bornes.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre avec un second membre constant ?

On résout d'abord l'équation homogène associée. On cherche ensuite une solution particulière constante, puis on additionne les deux expressions pour obtenir la solution générale avant d'appliquer la condition initiale.

Q : Comment traiter un terme retardé dans une transformée de Laplace ?

On repère la forme f(t-a)U(t-a). Sa transformée est F(p)e^(-ap). Le facteur exponentiel traduit le retard a et doit être conservé lors du calcul de la transformée inverse.

Q : Comment organiser son temps et gérer les points pendant cette épreuve de deux heures ?

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points. Répartissez le temps entre eux, avancez question par question et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les courbes à reporter sur le document-réponse.

Q : Quels éléments faut-il soigner pour répondre aux critères attendus dans ce sujet ?

Le sujet ne fournit pas de grille détaillée de notation. Présentez les étapes utiles, respectez les intervalles et les unités, donnez les valeurs exactes puis les arrondis demandés, et rendez le document-réponse complété.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts-com.fr/assets/annales/bts-communication/E2 - Mathématiques/2022/BTS Communication - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Communication : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.